NIST 关于不确定度的评定与表示

中国计量科学研究院压力室　岑月琴

1996 年 6 月 15 日

引言

1978 年，国际计量委员会（CIPM）要求国际计量局研究测量结果不确定度的表示，以便能在国际上取得一致。1980 年，国际计量局召集起来一个不确定度陈述工作组。1981 年，国际计量委员会在 INC-１国际建议的基础上，给出了测量不确定度表示方法的建议。

近年来，随着全球经济和市场的需要，在国际上出现了采纳 CIPM 不确定度表示方法的趋势。CIPM 方法在全球的广泛应用，必将使不同国家对科学、工程、贸易等的测量结果更容易相互理解、相互比较。

尽管 NIST 的测试结果都有不确定度报告书，但是 NIST 从来也没有一个统一的不确定度表示方法。为了用一种表示方法代替 NIST 使用的多种表示方法，简化对不确定度的解释，保证对外数据的统一，1992 年 7 月，NIST 院长 John W. Lyons 组织了一个委员会，来从事不确定度的陈述工作。在院长的要求下，不确定度陈述委员会仔细分析了 NIST 的客户对不确定度的陈述要求，以及这些要求和 CIPM 方法的兼容性。经过分析，他们得出结论，CIPM 关于不确定度的定量表示方法可以满足 NIST 顾客的需要。接着，该委员会向院长建议在 NIST 贯彻 CIPM 方法并取得院长的认可。

不确定度的表示方法

为了与国际上保持一致，NIST 基本上接受了 CIPM 方法。

1、标准不确定度

每一个不确定度分量用其标准偏差表示，这个标准偏差我们称之为标准不确定度，用 μ_i 表示。它等于估计方差的正的平方根。

1.1 不确定度分量的分类

测量结果的不确定度通常包括几个分量，这些分量按照评定他们所用的方法可分为二类:

A. 由统计方法计算的不确定度分量
B. 由其它方法计算的不确定度分量。

这种分类方法是以计算不确定度的方法为依据的，它不同于传统的分类，传统上的“偶然”和“系统”不确定度是按照不确定度分量对最后结果的影响而分的。

当一个实验结果在不同途径上使用时，随机分量可能会变为系统分量，同样，系统分量也可能变为随机分量。因此，当普遍使用随机不确定度和系统不确定度这两个词的时候，可能会引起麻烦。这就是把不确定度分成 A 类和 B 类的原因。

1.2 标准不确定度的 A 类评定

通过对一系列实验结果的统计分析，对不确定度进行的评定，我们称为 A 类评定，由此产生的不确定度为 A 类不确定度。A 类不确定度分量用标准偏差 S_i 和自由度 γ_I 表示(统计标准偏差等于统计方差的正的平方根)。

标准不确定度的 A 类评定是以数据处理的各种统计方法为基础的。例如：对一个量进行 n 次独立测量 X_1、X_2、…X_i、…X_n，其平均值、标准偏差和自由度分别为：

平 均 值：$$X=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

标准偏差：$$\mu(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2}{n(n-1)}}$$

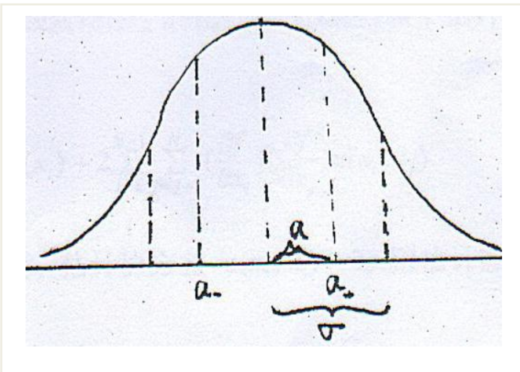
自由度: $$\nu=n-1$$

再如：利用最小二乘法拟合曲线，以评定曲线参数及其标准偏差。

1.3 标准不确定度的 B 类评定

借助于其它方法，而不是一系列实验的统计分析进行的不确定度评定称为不确定度的 B 类评定，由此得到的不确定度为 B 类不确定度。B 类评定通常是以对可得到的有关信息进行科学判断为基础的，这些信息包括：

- 以前的测量数据；
- 积累的有关仪器的状态和特性方面的知识和经验；
- 厂家的技术参数；
- 手册中参考数据带来的不确定度。



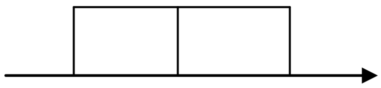
B 类不确定度分量由 μ_j 表示，可以认为 μ_j 是相应的标准偏差的近似。μ_j^2 可以看作是相应方差的近似，这个方差可从假设的分布得到。

下面是 B 类评定的一些例子：

1)、一个量，假设属于正态分布，估

计出下限和上限分别为 a_-和 a_+，这个量的数值落在区间(a_-，a_+)内的概率为 50%，则该量的最佳值为：(a_- + a_+)/2，a=0.6745σ，标准偏差 σ =1.48a，因此，标准不确定度为：μ_j = σ =1.48a，其中 a =(a_+ - a_-)/2。

2)、一个量，假设属于均匀分布，估计出量值的下限和上限分别为 a-和 a_+，量值落在区间(a_-，a_+)内的概率为 100%。我们知道，均匀分布的数学期望为(a_- + a_+)/2，方差为$(a_+ - a_-)^2/12$。



因此，其标准不确定度为：$\mu_j = a/\sqrt{3}$，
其中 a=（a_+ - a_-）/2。

如果我们采用三角分布，而不采用均匀分布，则标准不确定度为：

$$\mu_j = a/\sqrt{6}$$

与 B 类不确定度对应的自由度是比较麻烦的，一般地，当选定上、下限后，量值落在区间内的概率很高时，可取自由度：$\mu_{eff} \rightarrow \propto$。

2 合成不确定度

采用根和平方法或其它等价方法，把各个标准不确定度合成起来，从而可得到合成不确定度。它相当于测量结果的标准偏差，用 μ_c 表示。合成不确定度常用于基本物理常数、基本计量研究和国际比对中。

计算合成不确定度的常用方法如下：

设被测量 Y 是由 N 个其它量 X_1、X_2、…X_i…X_n 决定的，它们之间有函数关系：

$$Y=f(X_1，X_2，…，X_n)$$

如果 X_1、X_2、… X_i … X_n 的估计值分别为 x_1、x_2、… x_i … x_n，则测量结果的估计值为：

$$y= f(x_1，x_2，…，x_n)$$

测量结果 y 的合成不确定度 μ_c(y)(即测量结果 y 的评估标准偏差)等于评估方差 μ_c^2(y)的正平方根，评估方差 μ_c^2(y)为：

$$\mu_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mu^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=j+1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\mu(x_i, x_j)$$

当 X_1、X_2、… X_i … X_n 彼此独立时，估计协方差 $\mu(x_i , x_j) = 0$，则估计方差 μ_c^2(y)为：

$$\mu_c^2(y) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mu^2(x_i)$$

合成不确定度 $\mu_c(y)$的估计有效自由度 ν_{eff} 可由 welch-satterthwaite 公式计算，公式如下：

$$\nu_{eff} = \frac{\mu_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^4 \mu^4(x_i)}{\nu_i}}$$

3 扩展不确定度

扩展不确定度等于合成不确定度与一覆盖因子的乘积，表示为：$U = k\ \mu_c$ 。引入扩展不确定度是为了给定一个区间，使被测量以较大的概率落入这个区间，也就是说为了得到较高的置信度。这在一些特殊场合是非常必要的。

NIST 用扩展不确定度报告其测试结果，为与国际上的实际情况保持一致，覆盖因子取为：K=2。

在特殊情况下，需要较高置信度时，根据需要的置信度选取覆盖因子的方法如下：

a 评定合成不确定度 μ_c 的有效自由度；

所采用的公式为：

$$\nu_{eff} = \frac{\mu_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^4 \mu^4(x_i)}{\nu_i}}$$

b 根据需要的置信度和 ν_{eff} ，查 t-分布临界置表，从而得到 t-因子：t_p ；

c 取覆盖因子为：$k = t_p$ 。

4 不确定度的表示

当给出测试结果及其不确定度时，报告中包括以下内容：

a 所有标准不确定度分量及其相应的自由度，标准不确定度分量的类型；

b 详细描述每个不确定度分量的评定过程；

c 合成不确定度 μ_c；

d 给出一个概率解释。

表：B.1- t 分布在不同置信概率 p 与自由度 ν 的 $t_p(\nu)$值表

自由度 ν	置信概率 P(%)					
	68.27[(a)]	90	95	95.45[(a)]	99	99.73[(a)]
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.8
2	1.31	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5084	9.22
4	1.14	2.02	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	1.13	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	4.08	1.89	2.36	2.43	3050	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.69
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.67
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.85
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.76
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.69
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.64
20	1.03	1.73	2.09	2.13	2.85	3.59
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

[(a)]服从正态分布的量 z，其数学期望值为：μ_z，标准偏差：σ，对于 k=1、2、3，区间 $\mu_z \pm k\sigma$ 分别覆盖 P=68.27%、95.45%、99.73%的概率分布。

不确定度评定方法举例

下面我们采用 NIST 的不确定度表述方法，评估(0.1 ~ 10)MPa 国家基准活塞压力计的不确定度。

1 标准不确定度

1.1 有效面积不确定度分量

通过直接几何尺寸测量和交叉比对，得到五组活塞系统有效面积的初始值和十组比对数据，采用最小二乘法得到有效面积的估计值和标准偏差。

有效面积：$S \approx 1\times10^{-4}m^2$
标准偏差：$\sigma = \mu_A = 4.6\times10^{-10}m^2$
自 由 度：$\nu_A = 15 - 5 = 10$ (15 次独立测量、5 个未知量)

1.2 砝码质量的不确定度分量

砝码检定采用感量 3mg 的天平，则:

$M=5kg\pm3\times10^{-6}kg$

假设砝码质量值的分布均匀分布，则：

标准偏差：$\sigma=\mu_M=$（$3\times10^{-6}kg/3^{1/2}$）$kg=1.732\times10^{-6}kg$
自由度：$\nu_M\rightarrow\infty$

1.3 温度不确定度分量

实验室条件为：t=20℃±0.2℃，假设温度在区间[19.8℃，20.2℃]上为三角分布，则；

温度的标准偏差为 $\sigma = \mu_t = 0.2℃/6^{1/2}=0.0816℃=8.16\times10^{-2}℃$
标准偏差的自由度为：$\nu_t\rightarrow\infty$

1.4 重力加速度不确定度分量

实验室重力加速度测量结果为：$g=9.81263\pm0.000005m/s^2$
假设 g 值服从三角分布， 则：
标准偏差为：$\sigma = \mu_g = 5\times10^{-6}/6^{1/2}m/s^2$
标准偏差的自由度为：$\nu_g\rightarrow\infty$

1.5 空气密度不确定度

在 20℃和 60%RH 的实验室条件下，空气密度的平均值为：1.1965kg/m^3 变化量为：0.0145 kg/m^3，假设空气密度变化服从均匀分布，则：

标准偏差为：$\sigma = \mu_g = 0.0145℃/3^{1/2} = 8.37\times10^{-2}$ kg/m^3

标准偏差的自由度为：$\nu_p \to \infty$

2 合成不确定度

我们知道压力与各量之间的关系：

$$P = \frac{Mg(1-\rho_a/\rho_M)}{A_0\left[1+\left(\alpha_c+\alpha_p\right)(t-t_{20})\right]}$$

由于各个分量之间相互独立，根据不确定度的传递律公式：

$$\mu_c^2(y) = \sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mu^2(x_i)$$

我们可写出被测压力量的方差：

$$\mu_c^2(y) = \left(\frac{\partial P}{\partial A}\right)^2 \mu_A^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial M}\right)^2 \mu_M^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 \mu_t^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial g}\right)^2 \mu_g^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^2 \mu_\rho^2$$

$= 45.1^2 + 3.39^2 + 19.2^2 + 2.04^2 + 10.5^2$

$= 2526.36$

合成不确定度：$\mu_c(p)$ = 50.26Pa

合成不确定度 $\mu_c(p)$的有效自由度为：

$$\nu_{eff} = \frac{\mu_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i^4\mu^4(x_i)}{\nu_i}} = \frac{\mu_c^4(P)}{\frac{c_A^4\mu^4(x_A)}{\nu_A}} = 15.45 \triangleq 15$$

3 扩展不确定度

取置信度为：95.45%，查 t 分布临界值表有：k=2.18；

扩展不确定度 $U=k\mu_c(p)$=109.56Pa；

相对不确定度为：U/10MPa=109.56/10^7=10.956×10^{-6}=11ppm